А.М. Инков

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ. ЛЕКЦИЯ № 4



Шымкент, 2011

Лекция 4 Статические и динамические модели в форме уравнения регрессии (ч. 2)

В этой лекции мы рассмотрим методы регрессионного анализа, применяемые при получении статических и динамические модели в форме управления регрессии.

1. Корреляционный анализ результатов моделирования.

С помощью корреляционного анализа исследователь может установить, насколько тесна связь между двумя (или более) случайными величинами, наблюдаемыми и фиксируемыми при моделировании конкретной системы S. Корреляционный анализ результатов моделирования сводится к оценке разброса значений η относительно среднего значения $\bar{y}$, т. е. к оценке силы корреляционной связи. Существование этих связей и их тесноту можно для схемы корреляционного анализа $y = M[\eta/\xi = x]$ выразить при наличии линейной связи между исследуемыми величинами и нормальности их совместного распределения с помощью коэффициента корреляции.

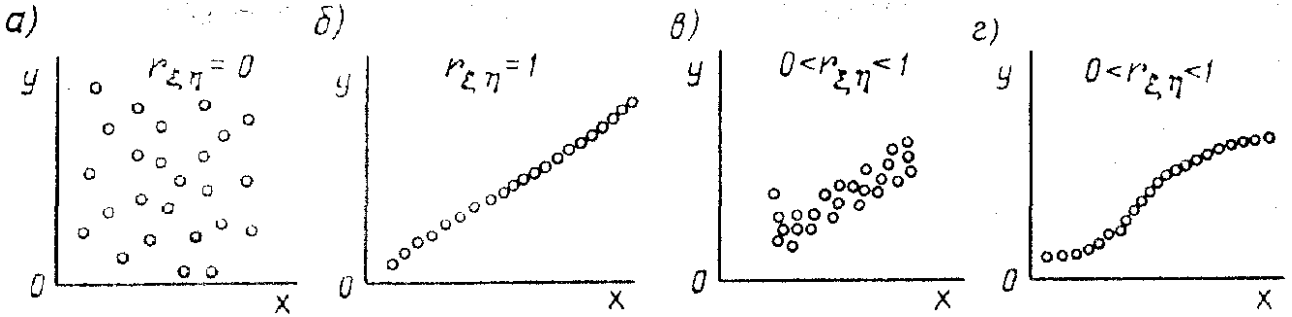


Рисунок 1. Различные случаи корреляции переменных

Для того чтобы оценить точность полученной при обработке результатов моделирования системы *S* оценки $r_{\xi\eta}$, целесообразно ввести в рассмотрение коэффициент

$w = \ln [(1+ r_{\xi\eta})/(1-r_{\xi\eta})]/2,$

причем *w* приближенно подчиняется гауссовскому распределению со средним значением и дисперсией:

$$\mu_w = \ln\left[\left(1+r_{\xi\eta}\right)/\left(1-r_{\xi\eta}\right)\right]/2$$

$$\sigma_w^2 = 1/(N-3)$$

Из-за влияния числа реализаций при моделировании *N* на оценку коэффициента корреляции необходимо убедиться в том, что $0 \le r_{\xi\eta} \le 1$ действительно отражает наличие статистически значимой корреляционной зависимости между исследуемыми переменными модели $M_м$. Это можно сделать проверкой гипотезы H_0: $r_{\xi\eta}=0$. Если гипотеза H_0 при анализе отвергается, то корреляци-

онную зависимость признают статистически значимой. Очевидно, что выборочное распределение введенного в рассмотрение коэффициента w при $r_{\xi\eta}= 0$ является гауссовским с нулевым средним $\mu_w = 0$ и дисперсией $\sigma_w^2 = (N-3)^{-1}$.

При анализе результатов моделирования системы S важно отметить то обстоятельство, что даже если удалось установить тесную зависимость между двумя переменными, то отсюда еще непосредственно не следует их причинно-следственная взаимообусловленность. Возможна ситуация, когда случайные ξ и η стохастически зависимы, хотя причинно они являются для системы S независимыми. При статистическом моделировании наличие такой зависимости может иметь место, например, из-за коррелированности последовательностей псевдослучайных чисел, используемых для имитации событий, положенных в основу вычисления значений x и y.

Таким образом, корреляционный анализ устанавливает связь между исследуемыми случайными переменными машинной модели и оценивает тесноту этой связи. Однако в дополнение к этому желательно располагать моделью зависимости, полученной после обработки результатов моделирования.

Регрессионный анализ результатов моделирования.

Регрессионный анализ дает возможность построить модель, наилучшим образом соответствующую набору данных, полученных в ходе машинного эксперимента с системой *S*. Под наилучшим соответствием понимается минимизированная функция ошибки, являющаяся разностью между прогнозируемой моделью и данными эксперимента. Такой функцией ошибки при регрессионном анализе служит сумма квадратов ошибок.

2. Дисперсионный анализ результатов моделирования.

При обработке и анализе результатов моделирования часто возникает задача сравнения средних выборок. Если в результате такой проверки окажется, что математическое ожидание совокупностей случайных переменных $\{y^{(1)}\}$, $\{y^{(2)}\}$, ..., $\{y^{(n)}\}$ отличается незначительно, то статистический материал, полученный в результате моделирования, можно считать однородным (в случае равенства двух первых моментов). Это дает возможность объединить все совокупности в одну и позволяет существенно увеличить информацию о свойствах исследуемой модели $M_м$, а следовательно, и системы *S*. Попарное использование для этих целей критериев Смирнова и Стьюдента для проверки нулевой гипотезы затруднено в связи с наличием большого числа выборок при моделировании системы. Поэтому для этой цели используется *дисперсионный анализ.*

дисперсионный анализ позволяет вместо проверки нулевой гипотезы о равенстве средних значений выборок проводить при обработке результатов моделирования проверку нулевой гипотезы о тождественности выборочной и генеральной дисперсий.

Возможны и другие подходы к анализу и интерпретации результатов моделирования, но при этом необходимо помнить, что их эффективность существенно зависит от вида и свойств конкретной моделируемой системы.

Регрессионный и корреляционный анализ широко используется при идентификация статических и динамических характеристик объектов.

Задача идентификации: задавшись видом уравнения регрессии (например, вида (2.2)), определить его неизвестные коэффициенты из условия, что заданная уравнением кривая будет с достаточной точностью описывать экспериментальную характеристику.

В качестве критерия соответствия при решении данной задачи берут критерий вида:

$$\min(\text{Fbi}),\ F(b_i) = \sum_{j=1}^{n} \left(y_{эj} - y_{pj}\right)^2 \qquad (4.1)$$

где $y_{эj}$ – экспериментальное значение; y_{pj} – расчётное значение.

Для нахождения коэффициентов bi составляют уравнения:

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = 0 \qquad (4.2)$$

Таким образом, получается система уравнений, решая которую можно определить b_i.

В конкретном случае, для выбора вида полинома используют графическое представление экспериментальной выборки, а также – априорные косвенные данные. Однако универсальных методик здесь нет.

Проиллюстрируем применение метода на примере для случая, когда уравнение регрессии выбрано в виде квадратного полинома: $\hat{y}_i = b_0 + b_1 \cdot x_i$.

Линейная регрессия от одного параметра.

С помощью этого метода ищется минимум функции (4.1), имеющей вид суммы квадратов разностей между экспериментальными yi и расчетными:

$$\hat{y}_i = F(x_i) = b_0 + b_1 \cdot x_i : \qquad (4.3)$$

$$I(b_i) = \sum_{i=1}^{n} \left[F(x_i) - y_i\right]^2 \rightarrow \min \qquad (4.4)$$

Минимизация осуществляется варьированием коэффициентов b , т.е. ищем такие b0 и b1, при которых I(b) будет минимальной. Необходимым условием минимума функции $I(b_i)$ является выполнение условий:

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \mathrm{b}_0} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - y_i] \cdot \frac{\partial F(x_i)}{\partial b_0} = 0 \qquad (4.5)$$

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \mathrm{b}_1} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - y_i] \cdot \frac{\partial F(x_i)}{\partial b_1} = 0$$

Решение этой система из двух уравнений с двумя неизвестными позволяет найти выражения для b0 и b1, при которых I(b) будет минимальной.

С учетом того, что $\frac{\partial F(x_i)}{\partial \mathrm{b}_0} = x_i$ и $\frac{\partial F(x_i)}{\partial \mathrm{b}_1} = 1$ система уравнений принимает вид:

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[(b_0 + b_1 \cdot x_i - y_i) \cdot x_i \right] = 0 \qquad \text{и} \qquad 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[b_0 + b_1 \cdot x_i - y_i \right] = 0$$

или (система нормальных уравнений, решая которую находим b0 и b1):

$$\begin{aligned} b_0 \cdot \sum x_i + b_1 \cdot \sum x_i^2 &= \sum x_i \cdot y_i \\ b_0 \cdot n + b_1 \cdot \sum x_i &= \sum y_i \end{aligned} \qquad (4.6)$$

откуда

$$b_0 = \frac{\sum y_i \cdot \sum x_i^2 - \sum x_i \cdot \sum x_i \cdot y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2} \qquad (4.\ 7) \text{ и}$$

$$b_1 = \frac{n \cdot \sum x_i \cdot y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2} \qquad (4.8)$$

или проще сначала найти b1 , а затем $b_0 = \overline{Y} - b_1 \cdot \overline{X}$ из этого уравнения видно, что между b1 и b0 существует корреляционная зависимость. Для оценки силы **линейной** связи можно вычислить выборочный коэффициент корреляции:

$$r = b_1 \cdot \sqrt{\frac{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2}{n \cdot \sum y_i^2 - \left(\sum y_i \right)^2}} \qquad (4.9)$$

Пример использования см. [1, стр. 130]

Метод множественной корреляции используется при идентификации объектом с несколькими входами (k - количество входов (факторов).. При k=1 – уравнение (2.1) график линии, k=2 – график плоскости, k=3 – график гиперповерхности.

Исходный статистический материал представлен в следующей таблице. В ней N строчек и k+2 столбцев.

Таблица 4.1

Исходные данные для получения математической модели с к - входами

№	X_0	X_1	X_2	X_3	…	Y
1	$x_{01}=1$	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	y_1
2	$x_{21}=1$	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	y_2
3	$x_{31}=1$	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…	y_3
4	$x_{41}=1$	x_{41}	x_{42}	x_{43}	…	y_4
…	…	…	…	…	…	…
N	$x_{n1}=1$	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	…	y_n

X_0 – фиктивная переменная, равная 1, она вводится для удобства записи. Столбик X_1 - значения входа номер 1, столбик X_2 - значения входа номер 2 и т.д. столбик Y - значения выходов в каждом из N опытов.

Отметим, что количество опытов N должно быть достаточно большим. Уменьшить количество опытов можно за счет использования методов планирования экспериментов (см. следующую лекцию).

Система нормальных уравнений, аналогично линейному случаю имеет вид (4.10).

Как видим, эта система уравнений имеет упорядоченное строение и может быть легко составлено для любого количества факторов k. В этой системе из k+1 уравнений с k+1 неизвестными k+1 слагаемых в левой части каждого уравнения. В том случае, если используется модель в виде полинома выше первого порядка, нелинейные члены уравнения регрессии рассматриваются как самостоятельные переменные

$$
\begin{aligned}
&b_0\sum X_0^2 + b_1\sum X_0X_1 + b_2\sum X_0X_2 + \cdots + b_k\sum X_0X_k = \sum X_0Y\\
&b_0\sum X_1X_0 + b_1\sum X_1^2 + b_2\sum X_1X_2 + \cdots + b_k\sum X_1X_k = \sum X_1Y\\
&b_0\sum X_2X_0 + b_1\sum X_2X_1 + b_2\sum X_2^2 + \cdots + b_k\sum X_2X_k = \sum X_2Y \qquad (4.10)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&b_0\sum X_kX_0 + b_1\sum X_kX_1 + b_2\sum X_kX_2 + \cdots + b_k\sum X_k^2 = \sum X_kY
\end{aligned}
$$

Рассмотрим пример, когда k=2 и ищутся коэффициенты модели уравнения вида:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + b_{11} \cdot X_1^2 + b_{22} \cdot X_2^2 + b_{12} \cdot X_1 X_2 . \qquad (4.11)$$

В качестве базовой берется модель:

1 2 3 4 5 6 <- номера коэффициентов

$$\hat{Y} = b_0 \cdot X_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + b_{11} \cdot X_3 + b_{22} \cdot X_4 + b_{12} \cdot X_5 \qquad (4.12)$$

Исходный статистический материал представлен в следующей таблице:

№ оп.	X_0	X_1	X_2	$X_3=X_1^2$	$X_4=X_2^2$	$X_5=X_1X_2$	Y
1	1	x_{11}	x_{12}	$x_{11}x_{12}$	x^2_{11}	x^2_{12}	y_1
2	1	x_{21}	x_{22}	$x_{21}x_{22}$	x^2_{21}	x^2_{22}	y_2
3	1	x_{31}	x_{32}	$x_{31}x_{32}$	x^2_{31}	x^2_{32}	y_3
4	1	x_{41}	x_{42}	$x_{41}x_{42}$	x^2_{41}	x^2_{42}	y_4
…	…	…	…	…	…	…	…
n	1	x_{n1}	x_{n2}	$x_{n1}x_{n2}$	x^2_{n1}	x^2_{n2}	y_n

Здесь выделенная часть таблицы – реальный эксперимент, остальная часть таблицы заполняется путем вычислений. Например:

№	X_0	X_1	X_2	X	X_4	X_5	Y
…	1	**2**	**4**	4	16	8	…
…	1	**3**	**6**	9	3	18	…

Система нормальных уравнений, аналогично предыдущему случаю имеет вид:

$$b_0\sum X_0^2 + b_1\sum X_0X_1 + b_2\sum X_0X_2 + b_{11}\sum X_0X_1^2 +$$
$$+ b_{22}\sum X_0X_2^2 + b_{12}\sum X_0X_1X_2 = \sum X_0Y$$
$$b_0\sum X_1X_0 + b_1\sum X_1^2 + b_2\sum X_1X_2 + b_{11}\sum X_1X_1^2 +$$
$$+ b_{22}\sum X_1X_2^2 + b_{12}\sum X_1^2X_2 = \sum X_1Y \qquad (4.13)$$

……

$$b_0\sum X_0X_1X_2 + b_1\sum X_1^2X_2 + b_2\sum X_1X_2^2 + b_{11}\sum X_1^3X_2 +$$
$$b_{22}\sum X_1X_2^3 + b_{12}\sum X_1^2X_2^2 = \sum X_1X_2Y$$

Коэффициенты bi находятся решением этой системы, что **гораздо** проще делать в матричной форме.

Регрессионный анализ в матричной форме. (См.[1] стр.146)

Использование матричной формы записи значительно упрощает как запись, так и решение задачи определения коэффициентов уравнения регрессии. Введем следующие обозначения (см. таблицу 4.1).

1).Матрица независимых переменных X – она содержит исходный статистический материал (см. таблицу в предыдущей теме, кроме последнего столбца) в ней n – строк и k+1 столбец:

2).Матрица (вектор) наблюдений Y (вектор – столбец): в нем n – строк.

X и Y известны в результате проведенного пассивного эксперимента.

3).Матрица (вектор) искомых коэффициентов уравнения регрессии B (вектор – столбец): в нем k+1 – строк.

Целью является определение вектора B по известным X и Y по формуле (4.15).

Таблица 4.1

Элементы матричной записи при регрессионном анализе

$X = \begin{bmatrix} x_{01} & x_{11} & \dots & x_{k1} \\ x_{02} & x_{12} & \dots & x_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{0n} & x_{1n} & \dots & x_{kn} \end{bmatrix}$	$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_k \end{bmatrix}$	$(X^T \cdot X)^{-1} = \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0k} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k0} & c_{k1} & \dots & c_{kk} \end{bmatrix}$
Матрица входов – факторы, независимые параметры	**Вектор выходов (наблюдений)**	**Вектор коэффициентов**	**Ковариационная матрица, матрица ошибок**

Матрицу $(X^T \cdot X)$ называют информационной матрицей (матрицей моментов), а $(X^T \cdot X)^{-1}$ матрицей ошибок или ковариационной матрицей.

В матричной форме система нормальных уравнений запишется:

$$X^T XB = X^T Y \qquad (4.14)$$

Решение этого уравнения имеет вид (**хорошо запомните эту формулу**!):

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y \qquad (4.15)$$

Уравнение (4.15) легко реализуется, например на Mathcad и широко применяется также и в методах планирования эксперимента. Однако вычисление вектора коэффициентов B иногда не может быть вычислено из-за **вырожденности** матрицы $(X^T \cdot X)$.

Это может происходить, например, если элементы матрицы X очень сильно отличаются друг от друга. Например, когда один из элементов равен 0.00005, в другой 100000.0.

Для определения остаточной дисперсии определяют матрицу столбец

$$\hat{Y} = X \cdot B \qquad (4.16)$$

Числитель остаточной дисперсии получают по формуле:

$$\left(Y - \hat{Y}\right)^T \cdot \left(Y - \hat{Y}\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(Y - \hat{Y}\right)^2 \qquad (4.17)$$

Рассмотрим пример применения регрессионного анализа для построения математической модели с тремя входами и одним выходом в виде (2.2):

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + b_3 \cdot X_3 + b_{11} \cdot X_1^2 + b_{22} \cdot X_2^2 + b_{33} \cdot X_3^2 + b_{12} \cdot X_1 \cdot X_2 + b_{13} \cdot X_1 \cdot X_3 + b_{23} \cdot X_2 \cdot X_3 + b_{123} \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \qquad (2.2)$$

Или, что то же, в виде:

$$\hat{Y} = b_1 + b_2 \cdot X_1 + b_3 \cdot X_2 + b_4 \cdot X_3 + b_5 \cdot X_1^2 + b_6 \cdot X_2^2 + b_7 \cdot X_3^2 + b_8 \cdot X_1 \cdot X_2 + b_9 \cdot X_1 \cdot X_3 + b_{10} \cdot X_2 \cdot X_3 + b_{11} \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \qquad (2.2A)$$

Исходные данные для построения математической модели приведены в таблице 4.2. На основе эксперимента в ней заполнены столбец 2 (значения выхода – Y) и столбцы 4-6 (значения входов X_1, X_2 и X_3). Эти значения выделены в таблице жирным шрифтом.

Столбец 3 заполнен значениями равными 1, а столбцы 7-13 значениями, вычисленными на основе значений столбцов 4-4. Проведено 20 опытов.

Таблица 4.2

Исходные данные для примера построения математической модели

№ оп	Y-Выход		Входы - X			Условные входы, рассчитанные на основе входов X						
		X_0	X_1	X_2	X_3	X_1^2	X_2^2	X_3^2	X_1*X_2	X_1*X_3	X_2*X_3	$X_1X_2X_3$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
1	**43,0**	1	**90**	**3**	**120**	8100	9	14400	270,000	10800,000	360,000	32400
2	**44,0**	1	**110**	**3**	**120**	12100	9	14400	330,000	13200,000	360,000	39600
3	**40,0**	1	**90**	**7**	**120**	8100	49	14400	630,000	10800,000	840,000	75600
4	**38,0**	1	**110**	**7**	**120**	12100	49	14400	770,000	13200,000	840,000	92400
5	**45,0**	1	**90**	**3**	**150**	8100	9	22500	270,000	13500,000	450,000	40500
6	**43,0**	1	**110**	**3**	**150**	12100	9	22500	330,000	16500,000	450,000	49500
7	**44,0**	1	**90**	**7**	**150**	8100	49	22500	630,000	13500,000	1050,000	94500
8	**42,0**	1	**110**	**7**	**150**	12100	49	22500	770,000	16500,000	1050,000	115500
9	**44,0**	1	**83,18**	**5,00**	**135,**	6918,9	25	18225	415,900	11229,300	675,000	56146,5
10	**41,0**	1	**116,8**	**5,00**	**135**	13642	25	18225	584,000	15768,000	675,000	78840
11	**43,0**	1	**100**	**1,64**	**135**	10000	2,6766	18225	163,600	13500,000	220,860	22086
12	**37,0**	1	**100**	**8,36**	**135**	10000	69,955	18225	836,400	13500,000	1129,140	112914
13	**45,0**	1	**100**	**5,00**	**109,7**	10000	25	12049,45	500,000	10977,000	548,850	54885
14	**48,0**	1	**100**	**5,00**	**160,3**	10000	25	25673,65	500,000	16023,000	801,150	80115
15	**47,0**	1	**100**	**5**	**135**	10000	25	18225	500,000	13500,000	675,000	67500
16	**45,0**	1	**100**	**5**	**135**	10000	25	18225	500,000	13500,000	675,000	67500
17	**46,5**	1	**100**	**5**	**135**	10000	25	18225	500,000	13500,000	675,000	67500
18	**45,5**	1	**100**	**5**	**135**	10000	25	18225	500,000	13500,000	675,000	67500
19	**46,7**	1	**100**	**5**	**135**	10000	25	18225	500,000	13500,000	675,000	67500
20	**46,0**	1	**100**	**5**	**135**	10000	25	18225	500,000	13500,000	675,000	67500

Таким образом, заданы значения вектора Y(столбец 2) и матрицы X (столбцы 3-13) имеющие значения:

$Y^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	43	44	40	38	45	43	44	42	44	41	43	37	45	48	47	45	46.5	45.5	46.7	46

$X =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	90	3	120	8100	9	14400	270	10800	360	32400
2	1	110	3	120	12100	9	14400	330	13200	360	39600
3	1	90	7	120	8100	49	14400	630	10800	840	75600
4	1	110	7	120	12100	49	14400	770	13200	840	92400
5	1	90	3	150	8100	9	22500	270	13500	450	40500
6	1	110	3	150	12100	9	22500	330	16500	450	49500
7	1	90	7	150	8100	49	22500	630	13500	1050	94500
8	1	110	7	150	12100	49	22500	770	16500	1050	115500
9	1	83.18	5	135	6918.912	25	18225	415.9	11229.3	675	56146.5
10	1	116.8	5	135	13642.24	25	18225	584	15768	675	78840
11	1	100	1.636	135	10000	2.676	18225	163.6	13500	220.86	22086
12	1	100	8.364	135	10000	69.956	18225	836.4	13500	1129.14	112914
13	1	100	5	109.77	10000	25	12049.453	500	10977	548.85	54885
14	1	100	5	160.23	10000	25	25673.653	500	16023	801.15	80115
15	1	100	5	135	10000	25	18225	500	13500	675	67500
16	1	100	5	135	10000	25	18225	500	13500	675	67500
17	1	100	5	135	10000	25	18225	500	13500	675	67500
18	1	100	5	135	10000	25	18225	500	13500	675	67500
19	1	100	5	135	10000	25	18225	500	13500	675	67500
20	1	100	5	135	10000	25	18225	500	13500	675	67500

Далее вычислив, например, в системе Mathcad по формуле (4.15) $B = (X^T X)^{-1} X^T Y$ получаем вектор одиннадцати значений коэффициентов B:

$B^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	-207.44742	3.94528	19.67478	0.74521	-0.01372	-0.56344	0.00019	-0.18750	-0.00875	-0.09583	0.00125

Можно произвести проверку, результаты которой сведены в таблицу 4.3. Расчетное значение выхода $\hat{Y}$ можно получить, применив формулу (2.2А) или её матричный аналог в виде (4.16): $\hat{Y} = X \cdot B$. Полученную нами математическую модель можно считать адекватной, т.к. Значение критерия $R^2 = 0{,}9724$ достаточно близко к единице.

Таблица 4.1

Результат проверки адекватности математической модели

№ опыта	Входные переменные			Выход		Погрешность (ошибка)	
	X_1	X_2	X_3	Y	$\hat{Y}$	абсолютная	относительная %
1	120,00	3,00	120,00	43,000	43,5514	-0,5514	-1,2823
2	120,00	3,00	120,00	44,000	44,3277	-0,3277	-0,7448
3	120,00	7,00	120,00	40,000	40,2128	-0,2128	-0,5321
4	120,00	7,00	120,00	38,000	37,9892	0,0108	0,0285
5	150,00	3,00	150,00	45,000	45,3582	-0,3582	-0,7959
6	150,00	3,00	150,00	43,000	43,1345	-0,1345	-0,3127
7	150,00	7,00	150,00	44,000	44,0196	-0,0196	-0,0446
8	150,00	7,00	150,00	42,000	41,7959	0,2041	0,4858
9	135,00	5,00	135,00	44,000	43,4885	0,5115	1,1625
10	135,00	5,00	135,00	41,000	41,0205	-0,0205	-0,0499
11	135,00	1,64	135,00	43,000	42,3519	0,6481	1,5072
12	135,00	8,36	135,00	37,000	37,1570	-0,1570	-0,4243
13	109,77	5,00	109,77	45,000	44,5247	0,4753	1,0562
14	160,23	5,00	160,23	48,000	47,9842	0,0158	0,0329
15	135,00	5,00	135,00	47,000	46,1306	0,8694	1,8497
16	135,00	5,00	135,00	45,000	46,1306	-1,1306	-2,5125
17	135,00	5,00	135,00	46,500	46,1306	0,3694	0,7943
18	135,00	5,00	135,00	45,500	46,1306	-0,6306	-1,3860
19	135,00	5,00	135,00	46,700	46,1306	0,5694	1,2192
20	135,00	5,00	135,00	46,000	46,1306	-0,1306	-0,2840
Суммарная ошибка =						1,0851E-07	-0,2330
Среднее значение ошибки =						5,4256E-09	**-0,0117**
Значение критерия Rквадрат =						**0,9724**	

Регрессионный метод идентификации линейных динамических систем (Метод наименьших квадратов)
Рассмотрим уравнение:

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3} + a_1\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_2\frac{d\ x(t)}{dt} + a_3x(t) = b\sin(ct)\ , \qquad (4.21)$$

В уравнении заменим производную конечной разностью:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{x_{i+2} - 3x_{i+1} + 3x_i - x_{i-1}}{\Delta t^3}\ , \qquad (4.22)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2}\ , \qquad (4.23)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}\ , \qquad (4.24)$$

Подставим выражения (4.22)-(4.24) в уравнение (4.21):

$$\frac{x_{i+2} - 3x_{i+1} + 3x_i - x_{i-1}}{\Delta t^3} + a_1\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2} + a_2\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} + a_3x_i = u\ , \qquad (4.25)$$

Приведя подобные, получим:

$$x_{i+2} = \left(3 - a_1\Delta t - a_2\Delta t^2\right)x_{i+1} - \left(3 - 2a_1\Delta t - a_2\Delta t^2 - a_3\Delta t^3\right)x_i + \left(1 - a_1\Delta t\right)x_{i-1} + u\Delta t^3\ , \qquad (4.26)$$

Представим (4.26) в виде:

$$x_{i+2} = \alpha_0x_{i+1} + \alpha_1x_i + \alpha_2x_{i-1} + \alpha_3u\ , \qquad (4.27)$$

где $\alpha_0 = \left(3 - a_1\Delta t - a_2\Delta t^2\right);\ \alpha_1 = \left(3 - 2a_1\Delta t - a_2\Delta t^2 - a_3\Delta t^3\right)$

$$\alpha_2 = (1 - a_1 \Delta t) \qquad \alpha_3 = \Delta t^3.$$

Рассматриваемый метод идентификации, основан на регрессионных процедурах с использованием метода наименьших квадратов.

Рассматриваем систему, которая задана уравнением:

$$x_{i+2} = \alpha_0 x_{i+1} + \alpha_1 x_i + \alpha_2 x_{i-1} + u$$

Минимизируемая функция имеет вид:

$$F = \sum_{j=1}^{n} (\tilde{x}_{i+2} - (\alpha_0 x_{i+1} + \alpha_1 x_i + \alpha_2 x_{i-1} + u))^2 \qquad (4.28)$$

Запишем систему уравнений для нахождения α_i , для этого найдем частные производные:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \alpha_0} = -2\sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_{i+2} - \alpha_0 x_{i+1} - \alpha_1 x_i - \alpha_2 x_{i-1} - \alpha_3 u) x_{i+1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} = -2\sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_{i+2} - \alpha_0 x_{i+1} - \alpha_1 x_i - \alpha_2 x_{i-1} - \alpha_3 u) x_i = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} = -2\sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_{i+2} - \alpha_0 x_{i+1} - \alpha_1 x_i - \alpha_2 x_{i-1} - \alpha_3 u) x_{i-1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha_3} = -2\sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_{i+2} - \alpha_0 x_{i+1} - \alpha_1 x_i - \alpha_2 x_{i-1} - \alpha_3 u) u_i = 0 \end{cases} \qquad (4.29)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{i+2}x_{i+1} - \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} x_{i+1}^2 - \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1} - \alpha_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}x_{i+1} - \alpha_3 \sum_{i=1}^{n} u x_{i+1} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i+2}x_i - \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} x_{i+1}x_i - \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \alpha_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}x_i - \alpha_3 \sum_{i=1}^{n} u x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i+2}x_{i-1} - \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} x_{i+1}x_{i-1} - \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} x_i x_{i-1} - \alpha_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 x_{i+1} - \alpha_3 \sum_{i=1}^{n} u x_{i-1} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i+2}u_i - \alpha_0 \sum_{i=1}^{n} x_{i+1}u_i - \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} x_i u_i - \alpha_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}u_i - \alpha_3 \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

Запишем систему в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{i+1}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1} & \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}x_{i+1} & \sum_{i=1}^{n} u_i x_{i+1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i+1}x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}x_i & \sum_{i=1}^{n} u_i x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i+1}x_{i-1} & \sum_{i=1}^{n} x_i x_{i-1} & \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 & \sum_{i=1}^{n} u_i x_{i-1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i+1}u_i & \sum_{i=1}^{n} x_i u_i & \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}u_i & \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{i+2}x_{i+1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i+2}x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i+2}x_{i-1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i+2}u_i \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$X \cdot \alpha = y \Rightarrow \alpha = X^{-1} \cdot y. \quad (4.32)$$

По полученным α найдем коэффициенты ai

$$a_1 = \frac{1-\alpha_2}{\Delta t}; \quad a_2 = \frac{2+\alpha_2-\alpha_0}{\Delta t^2}; \quad \alpha_3 = \frac{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2-1}{\Delta t^3}.$$

Основная литература

1. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии: Учебное пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и дополненное. -М.: Высшая школа, 1985. -327с.
2. Построение математических моделей химико-технологических процессов. Под ред. Дудникова Е.Г. - Л.: Химия, 1970. –312 с.
3. Практикум по автоматике и системам управления производственными процессами: учеб. пособие для вузов /под ред. И.М.Масленникова. -М.: Химия, 1986. -336с.

Дополнительная литература

4. Толчеев В.О., Ягодкина Т.В. Методы идентификации линейных одномерных динамических систем. -М.: Изд-во МЭИ, 1997